

T.D. MÉCANIQUE QUANTIQUE

* Série 3 *

I. Transformations de Fourier- Bases continues - Représentations

A/ En mécanique quantique, la transformée de Fourier $\varphi(p_x)$ d'une fonction $\Psi(x)$, à une dimension, est définies par :

$$\varphi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} p_x \cdot x} dx = \text{TF}[\Psi(x)]$$

et la transformée de Fourier inverse s'écrit : $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_x) e^{+\frac{i}{\hbar} p_x \cdot x} dp_x = \overline{\text{TF}}[\varphi(p_x)]$

- 1) Montrer que l'on a : $\int |\Psi(x)|^2 dx = \int |\varphi(p_x)|^2 dp_x$ (Egalité de Parseval-Plancherel).
- 2) Calculer $\text{TF}[\delta(x - x_0)]$ et en déduire $\delta(x - x_0)$. Généraliser à trois dimensions.
- 3) Même question pour $\delta(p_x - p_{x_0})$.
- 4) Considérons maintenant l'ensemble des fonctions d'onde planes $\{V_{\vec{p}_0}(\vec{r})\}$ telle que :

$$V_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = a e^{+\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}} \quad \text{avec } a = (2\pi\hbar)^{-3/2}$$

et l'ensemble des distributions de Dirac $\{\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r})\}$:

$$\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

- a) Montrer que $\{V_{\vec{p}_0}(\vec{r})\}$ forme une base orthonormée de l'espace $\mathcal{F}$.
- b) Même question pour $\{\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r})\}$.

B/ Associons à chaque fonction des bases, un ket de l'espace ξ :

$$\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}) \rightarrow |\vec{r}_0\rangle \quad \text{et} \quad V_{\vec{p}_0}(\vec{r}) \rightarrow |\vec{p}_0\rangle$$

- 1) Vérifier la R.O. et la R.F. des ensembles $\{|\vec{r}_0\rangle\}$ et $\{|\vec{p}_0\rangle\}$ de ξ .
- 2) En déduire $\langle \vec{r}_0 | \vec{p}_0 \rangle$. Que signifie ce bra-ket ?
- 3) Retrouver les relations de fermeture établies précédemment pour $\mathcal{F}$.
- 4) Donner les composantes d'un ket $|\Psi\rangle$ dans chacune des bases précédentes.
- 5) Retrouver, à partir de la norme de $|\Psi\rangle$, l'égalité de Parseval-Plancherel. Commenter.

C/ En représentation position $[\vec{r}]$, on sait que l'opérateur $\vec{P}$ coïncide avec l'opérateur différentiel $-i\hbar \vec{\nabla}$ appliqué à la fonctions d'onde $\Psi(\vec{r})$ et que l'opérateur $\vec{R}$ consiste à multiplier $\Psi(\vec{r})$ par $\vec{r}$ soit :

$$\langle \vec{r} | \vec{P} | \Psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) \quad \text{et} \quad \langle \vec{r} | \vec{R} | \Psi \rangle = \vec{r} \Psi(\vec{r})$$

- 1) Calculer les éléments de matrices :

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{P}_x | \mathbf{x}' \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{p}_x | \mathbf{X} | \mathbf{p}_x' \rangle$$

2) Montrer que l'on a : $[X, P_x] = i\hbar \mathbf{1}$ et de façon générale :

$[R_\alpha, P_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha\beta}$ alors que : $[R_\alpha, R_\beta] = [P_\alpha, P_\beta] = 0$ (à démontrer dans les deux représentations $[\vec{r}]$ et $[\vec{p}]$) ; $\alpha, \beta = x, y, z$ et $R_x = X, R_y = Y, R_z = Z$

3) Montrer que $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont des observables.

4) Ecrire en représentation position $[\vec{r}]$ l'équation suivante, (équation de Schrödinger) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_t\rangle = H |\Psi_t\rangle \quad \text{où } H \text{ est définie par : } H = \frac{P^2}{2m} + kR^2 ; \quad m \text{ et } k \text{ sont des constantes.}$$

II. Représentation discrète - Equation aux valeurs propres – E.C.O.C.

A/ Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des états à deux dimensions et on considère un ket $|\Psi\rangle$ défini par :

$$|\Psi\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle$$

1) a) Montrer que $|\Psi\rangle$ n'est pas normé à l'unité

b) Définir à partir de $|\Psi\rangle$ un ket normé à l'unité que l'on note $|\Phi\rangle$.

2) Déterminer dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, la matrice représentant l'opérateur projecteur, noté K , sur le ket $|\Phi\rangle$. K est-il hermitique ?

3) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de K (à un facteur de phase global près). On notera par $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ ces vecteurs propres.

4) Montrer que $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ vérifient la relation d'orthonormalisation et la relation de fermeture.

5) On considère un opérateur A représenté, dans la base $\{|u_i\rangle\}$, par la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer dans cette base la matrice représentant l'opérateur $\sqrt{A}$.

b) Même question pour l'opérateur $A^{3/2}$.

B/ On considère un système physique dont l'espace des états, qui est à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée discrète formée par les trois kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. Dans cette base, deux opérateurs L_z et S sont définis par :

$$\begin{array}{lll} L_z |u_1\rangle = |u_1\rangle & L_z |u_2\rangle = 0 & L_z |u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ S |u_1\rangle = |u_3\rangle & S |u_2\rangle = |u_2\rangle & S |u_3\rangle = |u_1\rangle \end{array}$$

1) Ecrire les matrices représentant, dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, les opérateurs L_z, L_z^2, S, S^2 . Ces opérateurs sont-ils des observables ?

2) Donner la forme de la matrice la plus générale représentant un opérateur qui commute avec L_z . Même question pour L_z^2, S^2 .

3) Vérifier que L_z^2 et S commutent et donner alors une base de vecteurs propres communs.

4) Parmi les ensembles suivants, lesquels forment un E.C.O.C. :

$$\{L_z\}, \{L_z, S\}, \{L_z^2, S\}, \{L_z^2, S^2\}.$$

TD N°3 : Mécanique Quantique

Exercice 1

Transformation de Fourier - Bases continues - Representation

$\Psi(p_x)$: Transformée de Fourier d'une fonction d'onde $\Psi(x)$ est donnée :

$$\begin{cases} x, p_x & : \text{position et impulsion dans la direction de } x \\ y, p_y & : & & & & y \\ z, p_z & : & & & & z \end{cases}$$

$$\Psi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x} dx = \text{TF}[\Psi(x)] \quad \text{Par la suite on définit}$$

la transformée de Fourier inverse :

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} dp_x = \overline{\text{TF}}(\Psi(p_x))$$

1° Montrer que $\int |\Psi(x)|^2 dx = \int |\Psi(p_x)|^2 dp_x$ (Egalité de Parseval-Plancherel)

Conjugué de $\Psi(p_x)$; $\Psi^*(p_x)$

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(p_x) e^{+\frac{i}{\hbar} p_x x} dp_x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(p_x)|^2 dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p_x) \Psi^*(p_x) dp_x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) e^{+\frac{i}{\hbar} p_x x} dx \right) \Psi(p_x) dp_x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} dp_x \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx$$

2° Calculer $TF(\delta(x-x_0))$

$\delta(x-x_0)$ est la fonction de Dirac : fonction réelle



Propriété de δ .

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x-x_0) dx = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi$$

$$\bullet \delta(x-x_0) = 0 \quad \text{pour } x \neq x_0$$

à 3D :

$$\bullet \iiint \varphi(\vec{r}) \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) d^3\vec{r} = \varphi(\vec{r}_0)$$

$$\bullet \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0 \quad \text{pour } \vec{r} \neq \vec{r}_0$$

$$TF(\delta(x-x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x} dx$$

$$\text{On pose } \varphi(x) = \frac{e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$TF(\delta(x-x_0)) = \varphi(x_0) = \frac{e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\delta(x-x_0) = \overline{TF} \left(\frac{e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_x}{\hbar}x} dp_x$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{p_x}{\hbar}(x-x_0)} dp_x$$

Pour un espace de $\dim = 3$

$$\text{TF } \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{e^{-i \frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r}_0}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} = \frac{e^{-i \frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r}_0}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \text{TF} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i \frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r}_0} \right)$$

$$\vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \vec{p} \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix} \quad \vec{r}_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

3° Calcul de $\overline{\text{TF}}(\delta(p_x - p_{x_0}))$

- intégration dans l'espace $\vec{r} \Rightarrow d\vec{r}$
+ intégration " l'impulsion $\vec{p} \Rightarrow d\vec{p}$

$$\overline{\text{TF}}(\delta(p_x - p_{x_0})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p_x - p_{x_0}) e^{i \frac{p_x}{\hbar} x} dp_x$$

$$\overline{\text{TF}}(\delta(p_x - p_{x_0})) = \frac{e^{i \frac{p_{x_0}}{\hbar} x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

↓

$$\text{Donc } \delta(p_x - p_{x_0}) = \text{TF} \left(\frac{e^{i \frac{p_{x_0}}{\hbar} x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)$$

$$\delta(p_x - p_{x_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i \frac{p_{x_0}}{\hbar} x} e^{-i \frac{p_x}{\hbar} x} dx$$

$$\delta(p_x - p_{x_0}) = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$\delta(p_x - p_{x_0}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{(p_x - p_{x_0})}{\hbar} x} dx$$

A. 3D :

$$\delta(\vec{p} - \vec{p}_0) = \text{TF} \left(\frac{e^{i \frac{\vec{p}_0}{\hbar} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \right)$$

$$\delta(\vec{p} - \vec{p}_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{-i \frac{(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{r}$$

$$d^3\vec{r} = dx dy dz$$

$$d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$$

$$\vec{p}_0 \begin{vmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{vmatrix}$$

4° Soit $\{V_{\vec{p}_0}(\vec{r})\}$ Ensemble des fonctions d'ondes planes :

$$V_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = (2\pi\hbar)^{3/2} e^{i \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

$$\delta_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$\{\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r})\}$ ensemble de Distribution des fonction de Dirac.

a Montrer que $\{V_{\vec{p}_0}(\vec{r})\}$ forme une base orthonormée de l'espace $\mathcal{F}$

En générale :

$$R.O : \underbrace{(w_\alpha, w_{\alpha'})}_{\text{Produit scalaire}} = \iiint w_\alpha^*(\vec{r}) w_{\alpha'}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta(\alpha - \alpha') \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha' \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha' \end{cases}$$

$$R.F : \int d\alpha w_\alpha^*(\vec{r}) w_\alpha(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r})$$

$$\begin{aligned} R.O : (V_{\vec{p}_0}(\vec{r}), V_{\vec{p}'_0}(\vec{r})) &= \iiint V_{\vec{p}_0}^*(\vec{r}) V_{\vec{p}'_0}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}'_0) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{i\frac{(\vec{p}'_0 - \vec{p}_0) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0 - \vec{p}'_0) \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \\ &= \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}'_0) \quad (\text{voir 3}) \end{aligned}$$

elle vérifie bien la relation d'orthogonalité (R.O) ✓

Relation de fermeture (R.F)

$$\begin{aligned} \iiint V_{\vec{p}_0}^*(\vec{r}) V_{\vec{p}_0}(\vec{r}) d^3\vec{p}_0 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{-i\frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} e^{i\frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{p}_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{-i\frac{\vec{p}_0(\vec{r} - \vec{r})}{\hbar}} d^3\vec{p}_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint e^{0} d^3\vec{p}_0 \\ &= \delta(\vec{r} - \vec{r}) \quad (\text{voir 2}) \end{aligned}$$

δ est une fonction Paire
 $\delta(x) = \delta(-x)$

relation de fermeture vérifier. ✓

b Montrer que $\{\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r})\}$ est une base.

⚠ δ est une fonction réel et paire.

$$(\delta_{\vec{r}_0}^*, \delta_{\vec{r}'_0}) = \iiint \delta_{\vec{r}_0}^*(\vec{r}) \delta_{\vec{r}'_0}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \iiint \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}'_0) d^3\vec{r}$$

$$f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'_0)$$

$$= \iiint \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}'_0) \Rightarrow R.O \text{ vérifier. } \checkmark$$

Pour les R.F :

$$|\psi\rangle = \iiint d^3r \psi(\vec{r}) |\vec{r}\rangle$$

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$= \underbrace{\iiint d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r} |}_{=1} \psi$$

$$\iiint d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r} | = 1$$

$$|\psi\rangle = \iiint d^3\vec{p} \varphi(\vec{p}) |\vec{p}\rangle \quad \text{avec} \quad \varphi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

$$|\psi\rangle = \iiint d^3\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

$$= \iint d^3\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | = 1$$

2° On deduire $\langle \vec{r}_0 | \vec{p}_0 \rangle$

$$\langle \vec{r}_0 | \vec{p}_0 \rangle = (\delta \vec{r}_0, \sqrt{\hbar})$$

$$= a \iiint d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}}$$

On applique : $\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{r}_0 | \vec{p}_0 \rangle = a e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}_0}}$$

C'est la fonction de l'onde plane d'impulsion $\vec{p}$ et de position $\vec{r}$.

Pour un espace 3D $\Rightarrow a = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

Pour " " " 1D $\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$\langle x_0, p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x_0}$$

$$(\delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}), \delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}')) = \iiint \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \delta(\vec{r}'-\vec{r}_0) d^3\vec{r}$$

$$f(\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$= \iiint \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) f(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$= f(\vec{r}) = \delta(\vec{r}'-\vec{r}) \quad \text{c'est la relation de fermeture.}$$

Remarque:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint \Psi(\vec{p}_r) e^{\frac{i\vec{p}_r \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{p}_r$$

fonction d'onde

Composante de $\Psi(\vec{r})$ dans la base $V_{\vec{p}}(\vec{r})$

$$\Psi(\vec{p}_r) = \underbrace{(V_{\vec{p}_r}, \Psi(\vec{r}))}_{\text{Projection de } \Psi(\vec{r}) \text{ dans } V_{\vec{p}_r}(\vec{r})}$$

Projection de $\Psi(\vec{r})$ dans $V_{\vec{p}_r}(\vec{r})$

Partie B

$$\text{Soit } \delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}) \longrightarrow |\vec{r}_0\rangle$$

$$V_{\vec{p}_0}(\vec{r}) \longrightarrow |\vec{p}_0\rangle$$

1/ Vérifier les relations R.O et R.F :

$$\text{R.O } (w_\alpha, w_{\alpha'}) = \int w_\alpha^*(\vec{r}) w_{\alpha'}(\vec{r}) d^3r = \delta(\alpha - \alpha')$$

Pour la représentation $|\vec{r}\rangle$ et $|\vec{p}\rangle$

$$\langle \vec{r}_0 | \vec{r}'_0 \rangle = \left(\underset{\text{bra}}{\delta_{\vec{r}_0}^*}, \underset{\text{ket}}{\delta_{\vec{r}'_0}} \right) = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}'_0)$$

$$\langle \vec{p}_0 | \vec{p}'_0 \rangle = (V_{\vec{p}_0}, V_{\vec{p}'_0}) = \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}'_0)$$

$$\text{R.F : } \int w_\alpha^*(\vec{r}) w_\alpha(\vec{r}) d\alpha = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\langle \vec{r}_0 | P_0 \rangle$ element qui permet le passage d'une base à une autre.

3/ Retrouver les relation de fermeture pour $|\vec{r}_0\rangle$ et $|P_0\rangle$

$$|\vec{r}_0\rangle \longmapsto \iiint d^3\vec{r} |\vec{r}_0\rangle \langle \vec{r}_0| = \mathbb{1}$$

$$|P_0\rangle \longmapsto \iiint d^3\vec{p} |P_0\rangle \langle P_0| = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_0 | \vec{r}_0' \rangle &= \langle \vec{r}_0 | \mathbb{1} | \vec{r}_0' \rangle \\ &= \iiint d^3\vec{r} \langle \vec{r}_0 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{r}_0' \rangle \\ &= \iiint d^3r \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0') \end{aligned}$$

$$\delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) ; \delta(\vec{r} - \vec{r}_0') = f(\vec{r} - \vec{r}_0')$$

$$= \iiint d^3r \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) f(\vec{r} - \vec{r}_0') = f(\vec{r}_0 - \vec{r}_0') = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_0')$$

Même démonstration pour $|P_0\rangle$

$$\begin{aligned} \langle P_0 | P_0' \rangle &= \langle P_0 | \mathbb{1} | P_0' \rangle \\ &= \iiint d^3p \langle P_0 | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | P_0' \rangle = \delta(P_0 - P_0') \end{aligned}$$

4/ Composante de $|\Psi\rangle$ dans les 2 base

$$\text{Pour } |\vec{r}_0\rangle \longmapsto \langle \vec{r}_0 | \Psi \rangle$$

$$\text{Pour } |P_0\rangle \longmapsto \langle P_0 | \Psi \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle r_0 | \Psi \rangle &= \langle r_0 | \mathbb{1} | \Psi \rangle \\ &= \iiint d^3\vec{r} \langle \vec{r}_0 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \Psi \rangle \\ &= \iiint d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Psi(\vec{r}) \\ &= \Psi(\vec{r}_0) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{p}_0 | \psi \rangle = \varphi(\vec{p}_0)$$

$$\langle \vec{p}_0 | \psi \rangle = \langle \vec{p}_0 | \mathbb{I} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3 \vec{p} \langle \vec{p}_0 | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3 p \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) \varphi(p)$$

$$\langle \vec{p}_0 | \psi \rangle = \varphi(\vec{p}_0) = \text{TF}(\psi(r_0))$$

5° Retrouver à partir de $|\psi(x)|^2$ l'égalité de Parseval-Plancherel :

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{I} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3 \vec{p} \langle \psi | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3 \vec{p} \varphi(p) \varphi^*(\vec{p}) = |\varphi(p)|^2$$

$$\varphi(\vec{p}) \xrightarrow{|\vec{r}\rangle} \psi(r)$$

$$\varphi(r) \xrightarrow{|\vec{p}\rangle} \varphi(p)$$

Partie C

1° en $|\vec{r}\rangle$:

$$\begin{array}{ccc} \vec{p} & \longrightarrow & -i\hbar \vec{\nabla} \\ \vec{R} & \longrightarrow & \vec{r} \end{array}$$

$$\langle \vec{r} | \vec{p} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi(\vec{r})$$

$$\langle \vec{r} | R | \psi \rangle = \vec{r} \psi(\vec{r})$$

a) Calculons $\begin{cases} \langle x | p_x | x' \rangle \\ \langle p_x | x | p'_x \rangle \end{cases}$ c'est une démonstration.

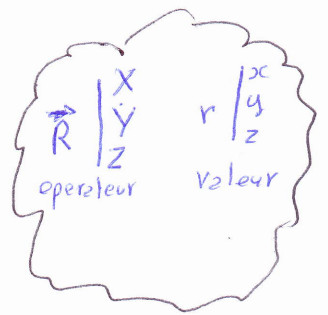
$$* \langle x | p_x | x' \rangle, \quad p_x \longrightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\text{on pose } |\psi\rangle = |x'\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x | p_x | x' \rangle &= \langle x | p_x | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} (\langle x | \psi \rangle) \end{aligned}$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} (\langle x|x' \rangle)$$

$$\langle x|P_x|x' \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} (\delta(x-x'))$$



$$\langle x|P_x|x' \rangle = -i\hbar \delta'(x-x')$$

$$* \langle P_x|X|P_x' \rangle = \langle P_x|\mathbb{1}X|P_x' \rangle$$

$$= \int dx \langle P_x|x \rangle \langle x|X|P_x' \rangle$$

$$= \int dx \langle P_x|x \rangle x \langle x|P_x' \rangle$$

$$\text{or } \langle x|P_x' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{+\frac{i}{\hbar} P_x' x}$$

$$\langle P_x|x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} P_x x}$$

$$\langle P_x|X|P_x' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int x e^{-\frac{i}{\hbar} (P_x - P_x')x} dx$$

$$\delta(P_x - P_x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} (P_x - P_x')x} dx$$

$$\frac{d}{dP_x} (\delta(P_x - P_x')) = \frac{-i}{\hbar} \times \frac{1}{2\pi\hbar} \int x e^{-\frac{i}{\hbar} (P_x - P_x')x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\hbar} \int x e^{\frac{i}{\hbar} (P_x - P_x')x} dx$$

$$= \frac{-\hbar}{i} \frac{d}{dP_x} (\delta(P_x - P_x'))$$

$$\Rightarrow \langle P_x|X|P_x' \rangle = i\hbar \frac{d}{dP_x} (\delta(P_x - P_x'))$$

2°/ Montrer que $[X, P_x] = i\hbar \mathbb{1}$

$$[X, P_x] = XP_x - P_x X$$

$$\langle \vec{r}|[X, P_x]|\psi \rangle = \underbrace{\langle \vec{r}|XP_x|\psi \rangle}_I - \underbrace{\langle \vec{r}|P_x X|\psi \rangle}_{II}$$

$$P_x |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \langle \vec{r} | X | \psi \rangle = x \psi(\vec{r}) \\ &= x \langle \vec{r} | \psi \rangle = x \langle \vec{r} | P_x | \psi \rangle \\ &= x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(r) \right) \end{aligned}$$

on pose $|\psi'\rangle = X |\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= \langle \vec{r} | P_x | \psi' \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} (\psi'(r)) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} (\langle \vec{r} | X | \psi \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} &= -i\hbar \frac{d}{dx} (x \psi(\vec{r})) \\ &= -i\hbar \psi(\vec{r}) - i\hbar x \frac{d\psi(r)}{dx} \end{aligned}$$

D'où

$$\text{(I)} - \text{(II)} = i\hbar \psi(\vec{r})$$

d'où $\langle \vec{r} | [X, P_x] | \psi \rangle = i\hbar \langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | i\hbar \mathbb{1} | \psi \rangle$

D'où

$$[X, P_x] = i\hbar \mathbb{1}$$

3° Pour qu'un opérateur soit une observable il faut que :

- A hermitique ($A = A^\dagger$)
- Les vecteurs propres de A constituent une base orthonormée de l'espace des états.

Pour R :

$$R_x |\vec{r}\rangle = x |\vec{r}\rangle$$

⇓

L'équation aux valeurs propres associées à R_x

Pour une dimension $X|x\rangle = x|x\rangle$, les valeurs propres sont réelles

$$R_x \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$|\vec{r}\rangle \begin{vmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \\ |z\rangle \end{vmatrix}$$

$\{|\vec{r}\rangle\}$ vérifie les relations R_0 et R_F

Les valeurs propres constituent une base orthonormée de l'espace des états

Reste à montrer que $R = R^\dagger$

Soient $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}$

$$\langle \varphi | \vec{R} | \psi \rangle = \langle \varphi | R^\dagger | \psi \rangle ?$$

$$\langle \varphi | \vec{R} | \psi \rangle = \langle \varphi | \mathbb{1} \vec{R} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3\vec{r} \langle \varphi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{R} | \psi \rangle$$

$$= \iiint d^3\vec{r} \varphi^*(\vec{r}) \vec{r} \psi(\vec{r})$$

$$= \left(\iiint d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \vec{r} \psi^*(\vec{r}) \right)^* = \left(\iiint d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}) \vec{r} \varphi(\vec{r}) \right)^*$$

$$= \left(\iiint d^3\vec{r} \langle \psi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{R} | \varphi \rangle \right)^*$$

$$= \langle \varphi | \vec{R} | \psi \rangle^* = \langle \varphi | \vec{R}^\dagger | \psi \rangle$$

de même pour $P = P^\dagger$

$$\langle \varphi | \vec{P} | \psi \rangle = \iiint d^3\vec{r} \langle \varphi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{P} | \psi \rangle$$

$$= -i\hbar \iiint d^3\vec{r} \varphi^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

Opérateur à une seule dimension

4° Ecrire en représentation position $[\vec{r}] : \{|\vec{r}\rangle\}$ l'équation de Schrödinger.

$$i\hbar |\dot{\psi}_t\rangle = H |\psi_t\rangle$$

$$= \left(\frac{p^2}{2m} + KR^2 \right) |\psi_t\rangle$$

$$i\hbar \left\langle \vec{r} \left| \frac{d}{dt} \right| \psi_t \right\rangle = \left\langle \vec{r} \left| \frac{p^2}{2m} + KR^2 \right| \psi_t \right\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle r | \psi_t \rangle = \langle \vec{r} | \frac{p^2}{2m} | \psi_t \rangle + \langle \vec{r} | KR^2 | \psi_t \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_t(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_t(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi_t(\vec{r})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_t(\vec{r}) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \Psi_t(\vec{r})$$

C'est l'équation
de Schrödinger

$$E = E_c + U : \text{Energie potentielle}$$

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \begin{cases} \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \\ p^2 = -\hbar^2 \Delta \end{cases}$$

II - Representation discrète - Equation aux valeurs propres - E.C.O.C

$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ base de $E \cong \mathbb{C}^2$

$$|\psi\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle$$

1° a) $\langle \psi | \psi \rangle = ?$

$$\langle \psi | = \langle u_1 | - i \langle u_2 |$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = (\langle u_1 | - i \langle u_2 |) (|u_1\rangle + i|u_2\rangle)$$

$$= \langle u_1 | u_1 \rangle + i \langle u_1 | u_2 \rangle - i \langle u_2 | u_1 \rangle + \langle u_2 | u_2 \rangle$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 1 \Rightarrow |\psi\rangle \text{ n'est pas normé}$$

b) Ret $|\psi\rangle$ normé de $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u_1\rangle + i |u_2\rangle]$$

2° Matrice associée à l'opérateur projecteur $P_{|\psi\rangle}$

Chercher les $\vec{v}$ propres de $\lambda=0$, $\lambda=1$

Soit $|\psi\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$

$$|\psi\rangle \text{ propre} \Leftrightarrow K|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha \\ \lambda \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = \lambda \alpha \\ \frac{1}{2}(i\alpha + \beta) = \lambda \beta \end{cases}$$

$$\underline{\lambda=0} \quad \begin{cases} \alpha - i\beta = 0 \\ i\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = i\beta$$

$$|\psi_1\rangle = i\beta|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$$

$$\boxed{|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [i|u_1\rangle + |u_2\rangle]_{\lambda=0}}$$

$$\underline{\lambda=1}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = \alpha \\ \frac{1}{2}(i\alpha + \beta) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -i\beta \\ \beta = i\alpha \end{cases} \Rightarrow \beta = i\alpha$$

$$|\psi_2\rangle = \alpha|u_1\rangle + i\alpha|u_2\rangle$$

$$|\psi_2\rangle_{\text{normé}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u_1\rangle + i|u_2\rangle]_{\lambda=1}}$$

4° $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$?

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-i\langle u_1 | + \langle u_2 |] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|u_1\rangle + i|u_2\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2} (-i\langle u_1 | u_1 \rangle + i\langle u_2 | u_2 \rangle) = 0 \end{aligned}$$

$$R.F \quad |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \mathbb{I}$$

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2| = \mathbb{I} \quad ?$$

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{|\psi_1\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{|\psi_2\rangle\langle\psi_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad \text{Cost R.F}$$

II. Partie B.

$$L_z |u_1\rangle = |u_1\rangle \quad L_z |u_2\rangle = 0 \quad L_z |u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

S

$$\begin{array}{l} \langle u_1 | L_z | u_1 \rangle = 1 \quad |u_1\rangle \\ \langle u_1 | L_z | u_2 \rangle = 0 \quad |u_2\rangle \\ \langle u_1 | L_z | u_3 \rangle = 0 \quad |u_3\rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} \langle u_2 | L_z | u_1 \rangle = 0 \\ \langle u_2 | L_z | u_2 \rangle = 0 \\ \langle u_2 | L_z | u_3 \rangle = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \langle u_3 | L_z | u_1 \rangle = 0 \\ \langle u_3 | L_z | u_2 \rangle = 0 \\ \langle u_3 | L_z | u_3 \rangle = -1 \end{array}$$

$$L_z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S |u_1\rangle = |u_3\rangle \quad S |u_2\rangle = |u_2\rangle \quad S |u_3\rangle = |u_1\rangle$$

$$\langle u_1 | S | u_1 \rangle = 0 \quad u_1$$

$$\langle u_2 | S | u_1 \rangle = 0 \quad u_2$$

$$\langle u_3 | S | u_1 \rangle = 1 \quad u_3$$

$$S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^2 |u_1\rangle = S S |u_1\rangle = S |u_3\rangle = |u_1\rangle$$

$$S^2 |u_3\rangle = |u_3\rangle$$

L_z, L_z^2, S et S^2 sont hermitique

L_z, L_z^2, S^2 sont diagonale et les $\vec{v}_p (\{ |u_i\rangle \})$

forme une base orthogonale et complète de E_3

de même S est diagonalisable. En effet

$$|v_2\rangle \text{ est } \vec{v}_p \longrightarrow v_p = 1$$

Diagonalisation de la matrice réduit $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\{ |v_1\rangle, |v_3\rangle \}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = x_1$$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|v_1\rangle + |v_3\rangle)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -y_3$$

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|v_1\rangle - |v_3\rangle)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \{ |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \}$$

2°

$\{ |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \}$ forme une base ortho et complète

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{o.n}$$

$\sum |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| = \mathbb{1}_3 \longrightarrow$ base complète
— S est une observable

2°

Soient M une matrice qui commute avec L_z

$$ML_z - L_z M = 0$$

$$L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$NL_z^2 = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 & n_{13} \\ n_{12} & 0 & n_{23} \\ n_{13} & 0 & n_{33} \end{pmatrix}$$

$$L_z^2 N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

$$NL_z^2 = L_z^2 N \Rightarrow \begin{cases} n_{11} \forall & n_{33} \forall & n_{22} \forall \\ n_{21} = 0 & n_{12} = 0 & n_{32} = 0 \\ n_{31} \forall & n_{13} \forall & n_{23} = 0 \end{cases}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 & n_{31} \\ 0 & n_{22} & 0 \\ n_{31} & 0 & n_{33} \end{pmatrix}$$

$$S^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 \quad \forall M \quad [N, \Pi_3] = 0$$

$$3^\circ \quad L_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{ |v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{ |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \}$$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|v_1\rangle + |v_3\rangle)$$

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|v_1\rangle - |v_3\rangle)$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{ |v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \}$$

S et L_z^2 commute car S est la forme de N qui commute avec L_z^2

$$L_z M_z = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\pi_{31} & -\pi_{32} & -\pi_{33} \end{pmatrix}$$

$$M L_z = \begin{pmatrix} \pi_{11} & 0 & -\pi_{13} \\ \pi_{21} & 0 & -\pi_{23} \\ \pi_{31} & 0 & -\pi_{33} \end{pmatrix}$$

$$M L_z = L_z M = \begin{cases} \forall \pi_{11} & \pi_{21} = 0 & \pi_{33} \forall \\ \pi_{12} = 0 & \pi_{22} \forall & \pi_{23} = 0 \\ \pi_{13} = 0 & \pi_{31} = 0 & \pi_{32} = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix}$$

L_z est diagonale et les v_p sont simple donc M doit être diagonale
Pour qu'elle commute avec L_z

D'une façon générale :

Soit A une observable $A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \\ & \lambda_{22} & \\ & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$

La forme générale de la matrice M qui commute avec $\{\vec{v}_p\}$
à la forme suivant

$$M = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Soit N une matrice qui commute avec L_z

$$N L_z^2 - L_z^2 N = 0$$

$$L_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$L_z^2 \quad v_p = 1 \quad \begin{matrix} \nearrow |u_1\rangle \\ \searrow |u_3\rangle \end{matrix}$$

$|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_3\rangle$ sont 2 vecteur propre de L_z^2

$$\rightarrow v_p = 1$$

$$L_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle = u_1, |\varphi_3\rangle\}$$

$$L_z^2 |\varphi_1\rangle = L_z^2 (|u_1\rangle + |u_3\rangle) = |\varphi_1\rangle$$

$$L_z^2 |\varphi_3\rangle = |\varphi_3\rangle$$

La base de $\vec{V}_p$ commun est $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$$

4% ECOC (ensemble complet des observable qui commute)

L'ECOC permet de déterminer l'état du système quantique sans ambiguïté.

Pour un ECOC on a les observable commute deux à deux

$\Rightarrow$ Ils possèdent une base de $\vec{V}_p$ communs.

et la donne d'un jeu de valeur propre détermine de façon unique l'état du système $(a_1, b_1, c_3, d_4) \rightarrow$ seul $\vec{V}_p$ connu

Application :

~~$\{A, B, C, D\}$ est un ECOC~~

$$\left\{ L_z \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{commute avec lui même} \\ v_p \text{ de } L_z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \downarrow & | & \downarrow \\ |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \{L_z\} \text{ est un ECOC}$$

$$\{L_z, S\} \text{ or } [L_z, S] \neq 0 \Rightarrow \{L_z, S\} \text{ n'est pas un ECOC}$$

$$\{L_z^2, S^2\}$$

$$[L_z, S^2] = 0 \quad \text{commute}$$

$$L_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$$

chaque couple de $V_p \rightarrow 1$ seule état propre

$\vec{V}_p$	$V_p(L_z^2)$	$V_p(S^2)$
$ \varphi_1\rangle$	1	1
$ \varphi_2\rangle$	0	1
$ \varphi_3\rangle$	1	-1

$\Rightarrow \{L_z^2, S^2\}$ est un E.C.O.C

$$\{L_z^2, S^2\}$$

$$[L_z^2, S^2] = 0$$

Mais $\{L_z^2, S^2\}$ n'est pas un E.C.O.C

V_p	L_z^2	S^2
$ u_1\rangle$	1	1
$ u_2\rangle$	0	1
$ u_3\rangle$	1	1

$$(1, 1) \begin{cases} |u_1\rangle \\ |u_3\rangle \end{cases}$$

$$P_{|\varphi\rangle} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

$$P_{|\varphi\rangle} |u_1\rangle = |\varphi\rangle \langle\varphi|u_1\rangle$$

$$= |\varphi\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle u_1|u_1\rangle - i \langle u_2|u_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} [|u_1\rangle + i |u_2\rangle]$$

$$P_{|\varphi\rangle} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{pmatrix}$$

$$P_{|\varphi\rangle} |u_2\rangle = |\varphi\rangle \langle\varphi|u_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi\rangle [\langle u_1|u_2\rangle - i \langle u_2|u_2\rangle]$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} |\varphi\rangle \quad \times \quad |\varphi\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice $[K]$ associée à $P_{|\varphi\rangle}$

$$K = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$

$$P_{|\varphi\rangle}^* = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)^*$$

$$= |\varphi\rangle\langle\varphi| = P_{|\varphi\rangle}$$

$P_{|\varphi\rangle}$: hermitique

Pour que $P_{|\varphi\rangle}$ soit hermitique, il faut que sa matrice ait :

- Les éléments diagonaux réels
- " " symétrique par rapport à la diagonale principale soient conjugués l'un de l'autre $m_{ij} = m_{ji}^* \quad (i \neq j)$

3/ Pour calculer les ^{vecteur} vecteur propre ($\vec{v}$ propre) de K on résout l'équation aux $\vec{v}$ propre suivante :

$$\det(K - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \lambda = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

On a deux $\vec{v}$ propre distincte (valeur propre : $\bar{v}$) $\Rightarrow K$ est diagonale, sa matrice diagonale D s'écrit

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Si on ~~montre~~ travaille dans une espace à N dimensions et on trouve N $\bar{v}$ propres $\Rightarrow$ La matrice est diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

• Si on trouve que le nombre de $\bar{v}$ propres $<$ à la dimension de l'espace
On a deux possibilités

1- La matrice peut être diagonale si le sous espace propre associé à la valeur propre dégénérée (répéter) est de dimension égale à l'ordre de dégénérescence (répétition)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

2- Si la dimension du sous espace est inférieur à l'ordre de dégénérescence alors la matrice n'est pas diagonale

La matrice est dite triangulaire supérieur ou inférieur

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ & b & f \\ & & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ b & d & \\ c & f & e \end{pmatrix}$$

$$\{L_z\} \quad L_z L_z = L_z^2 \Rightarrow [L_z, L_z] = 0$$

Les $\bar{v}$ propre de L_z sont $\begin{matrix} \text{degenerees} \\ \text{non} \end{matrix}$

$$\Rightarrow \{L_2\} \text{ ECoC}$$

$\vec{V}$ propre	L_z^2	S_z	S^2
$ \varphi_1\rangle = u_2\rangle$	0	1	1
$ \varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1\rangle + u_3\rangle)$	1	1	1
$ \varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1\rangle - u_3\rangle)$	1	-1	1

$\{S^2\}$ n'est pas un ECOC car les $\bar{v}_p$ sont dégénérées

$$\{S\} \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 11 \quad 0 \quad \dots$$
$$\{L_2^2\} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$\{L_z^2, S\}$ est il ECOC?

on vérifie que $[L_z, S'] = 0$

Pour $\{L_z^2, S\}$

$(0, 1)$	$\longrightarrow$	$ 4_1\rangle$
$(1, 1)$	$\longrightarrow$	$ 4_2\rangle$
$(1, -1)$	$\longrightarrow$	$ 4_3\rangle$

Les couples de $\bar{v}$ propre sont distincte

$$\Rightarrow \{L_z^2, S\} \text{ est un ECOC.}$$
$$\{L_z^2, S^2\} \text{ est il ECOC?}$$
$$\{L_z^2, S^2\} \begin{cases} (0, 1) \longrightarrow |\psi_1\rangle \\ (1, 1) \longrightarrow |\psi_2\rangle \\ (1, 1) \longrightarrow |\psi_3\rangle \end{cases}$$

$\{L^2, S^2\}$ n'est pas un ECR car $(1,1) \begin{matrix} \nearrow | \varphi_2 \rangle \\ \searrow | \varphi_3 \rangle \end{matrix}$

3°/ vérifier que L_z^2 et S commutent

On va montrer q si $L_z^2 S = S L_z^2$

On applique $L_z^2 S$ et $S L_z^2$ aux ket $\{|u_i\rangle\}$

$$\begin{cases} L_z^2 S |u_1\rangle = L_z^2 |u_3\rangle = -L_z |u_3\rangle = |u_3\rangle \\ S L_z^2 |u_1\rangle = S |u_1\rangle = |u_3\rangle \end{cases}$$

même chose pour $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$

$$\Rightarrow [L_z^2, S] = 0$$

$$S : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_1\rangle + |u_3\rangle) = |\psi_1\rangle \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow |u_2\rangle \\ \lambda_3 = 1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_1\rangle - |u_3\rangle) = |\psi_3\rangle \end{cases}$$

$$L_z^2 : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \longrightarrow |u_1\rangle \\ \lambda_2 = 0 \longrightarrow |u_2\rangle \\ \lambda_3 = 1 \longrightarrow |u_3\rangle \end{cases}$$

Base propre commune à L_z^2 et S

$|u_1\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_3\rangle$. En effet $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_3\rangle$ propre aussi pour L_z^2 car ils représentent des combinaisons linéaires des vecteur $|u_1\rangle$ et $|u_3\rangle$

$$\text{Pour } S^2 : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \longrightarrow |u_1\rangle \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow |u_2\rangle \\ \lambda_3 = 1 \longrightarrow |u_3\rangle \end{cases}$$

Pour L_z^2 et S^2 le système de vecteur propres communs est : $\{|u_i\rangle\}$.

$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ base commune à L_z^2 et S^2

4°/ Pour qu'un observable ou un ensemble d'observables forme(ent) un E.C.O.C., il faut :

- Les valeurs propres sont non dégénérées
- La donnée de valeurs propres détermine de manière unique les vecteur propre communs
- Les observable commute deux à deux